

跳跃 CKLS 模型的 MCMC 估计与应用

孙琳

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510090)

摘要: 考虑金融市场的非系统风险, 在传统的 CKLS 模型中加入随机跳跃因素, 提出了一种刻画短期利率的扩展 CKLS 模型. 采用 Euler 法离散化连续过程, 得到离散过程的似然函数, 并采用基于马尔可夫链蒙特卡洛法估计了模型的未知参数. 采用上海银行间同业拆放利率数据进行实证研究. 结果表明, 跳跃在所选的研究期间以较高的概率发生, 马尔可夫链蒙特卡洛法在参数估计中是有效的.

关键词: 马尔可夫链蒙特卡洛; 跳跃 CKLS 模型; 上海银行间同业拆放利率; 利率模型

中图分类号: F830; O212

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2010)02-0068-04

短期利率是指融资期限在一年以内的各种金融资产的利率. 由于它直接影响着各种固定收益债券及其衍生产品的定价, 与此同时也被视为主要的参考利率, 因此采用合理的随机模型来刻画中国短期利率变化过程对金融资产和金融衍生产品的定价、风险管理以及推动利率市场化, 均有重要意义. 众多学者提出了许多利率期限结构模型来刻画短期利率的随机行为, 例如 Merton^[1]、Brennan 和 Schwartz^[2,4]、Vasicek^[5]、CIR (Cox, Ingersoll 与 Ross)^[6]、CKLS (Chan, Karolyi, Longstaff 和 Sanders)^[7] 等. 这些模型假设利率的动态变化都遵循扩散过程, 即瞬时利率可用下列随机微分方程的一般形式来表达:

$$dr_t = \mu(r_t)dt + \sigma(r_t)dW_t, \quad (1)$$

其中, $\mu(r_t)$ 为漂移项, 表示利率变化的瞬时期望; $\sigma(r_t)$ 为扩散项, 即利率变化的瞬时标准差; dW_t 为布朗运动的微分增量. 当漂移项或波动率函数选择不同形式时, 就能得到已有的各个著名随机利率模型, 如 Vasicek 模型、CIR 模型、CKLS 模型. 大量的学者研究了各种随机利率模型的参数估计问题, 如 Kutoyans^[8]、Parkasa Rao^[9] 以及 Liptser 与 Shiryaev^[10].

然而, 金融市场自身的复杂性决定了仅仅用连续扩散模型来描述是不完全的, 利率、股价等变量的连续性经常会被一些不可预测的随机事件所破坏, 带来因子的突然跳跃, 例如金融危机、股市崩盘等. 同时国内外大量的实证研究表明, 金融资产价格变化过程中存在非正常的跳跃, 如 Das^[8]、Johannes^[9] 的研究. 为了在模型中充分反映这些突发事件的影

响, 本文把利率变化过程分解成连续和跳跃两部分, 连续部分用布朗运动来描述, 跳跃过程用泊松过程来描述, 并且假定跳跃过程与连续过程是相互独立的, 具体做法是在 CKLS 模型的基础上, 考虑随机跳跃, 采用带跳跃的 CKLS 模型来刻画短期利率的价格行为模式, 即:

$$dr_t = k_r(\mu_r - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t + d\left(\sum_{j=1}^{N_t} \xi_{r_j}\right). \quad (2)$$

其中, k_r 表示回归速度; μ_r 表示长期收益率; γ 表示利率波动性对利率水平敏感程度的参数, γ 越大, 短期利率方差 σ 对利率水平效应越敏感; N_t 是强度为 λ 的泊松过程, 表示跳跃的次数; 同时跳跃幅度 ξ_{r_j} 是独立同分布时间序列且 $\xi_{r_j} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$.

本文采用带跳跃的 CKLS 模型来刻画短期利率的变化过程, 并采用基于贝叶斯法的马尔科夫链蒙特卡洛估计方法, 从隐含变量的先验分布中抽取样本, 把样本作为跳跃因子的观测数据, 进而估计模型的参数值. 具体来说本文首先介绍了马尔科夫链蒙特卡洛估计方法. 然后结合上海银行间同业拆放利率数据进行模型的实证检验. 最后得出跳跃部分在利率变化过程中有着重要影响, 且带跳跃的 CKLS 模型具有较好的拟合能力.

1 马尔科夫链蒙特卡罗估计法

利率模型参数估计目前主要有广义矩估计法 (Generalized Method of Moments, GMM)^[11]、拟似然函数最大值法 (Quasi-Maximum Likelihood, QML)^[12] 与马尔可夫链蒙特卡罗模拟 (Markov chain Monte

Carlo simulation, MCMC)^[13]等法. 但是 GMM 的计算量大而且复杂, 而 QML 方法的优点是直接而且计算量小, 但是和 MCMC 相比, 估计结果缺乏有效性. 因此应用 MCMC 方法来进行参数估计.

马尔科夫链蒙特卡罗法在金融中有着广泛的应用, 它是在给定观察数据的条件下, 基于贝叶斯推断来估计模型的参数. 该方法的基本思想是模拟一条马尔科夫链的样本路径, 链的状态空间是被估计参数的值, 链的极限分布为被估计参数的贝叶斯后验分布. 在充分迭代后, 马尔科夫链收敛于一个平稳的目标分布, 而不依赖于原始状态. 将前面测试期阶段的状态滤去, 剩下的链将作为目标后验分布的样本. Gibbs 抽样是最简单、应用最广泛的 MCMC 方法, 在实际应用中使用非常方便. 实现 MCMC 模拟目前主要有两类方法, 一类就是 Gibbs 抽样, 另一类就是 Metropolis-Hasting 抽样. 本文采取在 Gibbs 抽样中应用 Metropolis-Hasting 抽样的方法. 假设目标分布为 $p(X|\Theta, Y)$ 且 $p(X|\Theta, Y)$ 与 $p(\Theta|X, Y)$ 完全由 c 联合分布 $p(X, \Theta|Y)$ 决定. 算法思路是:

- (1) 给定初始集合 $(X^{(0)}, \Theta^{(0)})$;
- (2) 抽样 $X^{(1)} \sim p(X|\Theta^{(0)}, Y)$;
- (3) 抽样 $\Theta^{(1)} \sim p(\Theta|X^{(1)}, Y)$.

重复以上步骤, 该算法将产生随机变量序列 $\{X^{(g)}, \Theta^{(g)}\}_{g=1}^G$. 该序列是一具有有限幅特性的马尔科夫序列: 该序列的分布在一定条件下收敛于等价分布 $p(X, \Theta|Y)$. 如果能得到关于 $p(\Theta|X, Y)$ 与 $p(X|\Theta, Y)$ 的闭式表达式, 只需采用 Gibbs 抽样即可. 否则, 还需采用 Metropolis-Hasting 抽样法, 该过程可以表示为以下两个步骤:

- (1) 从建议密度 $q(\Theta_i^{(g+1)}|\Theta_i^{(g)})$ 抽取 $\Theta_i^{(g+1)}$;
- (2) 利用 $\Theta_i^{(g+1)}$ 计算接受概率 $\alpha(\Theta_i^{(g+1)}, \Theta_i^{(g)})$, 这里

$$\alpha(\Theta_i^{(g+1)}, \Theta_i^{(g)}) = \min\left(\frac{\pi(\Theta_i^{(g+1)})q(\Theta_i^{(g)}|\Theta_i^{(g+1)})}{\pi(\Theta_i^{(g)})q(\Theta_i^{(g+1)}|\Theta_i^{(g)})}, 1\right).$$

重复以上步骤, 直到马尔科夫链收敛为止. 此时估计参数 Θ_i 就是后验边缘期望:

$$E(\Theta_i|Y) = \int p(\Theta_i|Y)d\Theta_i \approx \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G \Theta_i^{(g)}$$

2 数据与模型参数估计

尽管我国的主要存贷款利率并未实现市场化, 但某些利率如国内同业拆借利率 (China Interbank Offered Rate, CHIBOR)、国债回购利率以及上海银

行间同业拆放利率 (Shanghai Interbank Offered Rate, SHIBOR) 等已经基本市场化. 随着交易量的不断增加, 这些利率在一定程度上反映了我国金融市场上的资金供求情况, 因此本文采用上海银行间同业拆放隔夜利率数据进行实证研究, 并选择从 2006 年 10 月 8 日至 2009 年 10 月 10 日 754 个数据. 由于各种不同期限的利率以连续复利形式表示, 所以先将该利率数据转换为等价连续复利.

图 1 绘制了上海银行间同业拆放隔夜利率数据的日变化过程, 表 1 给出了该利率序列的基本统计描述. 从表中的统计量可以看出该时间序列的分布为非高斯分布且具有非平稳性、均值回归性、波动性群聚性、尖峰厚尾性等.

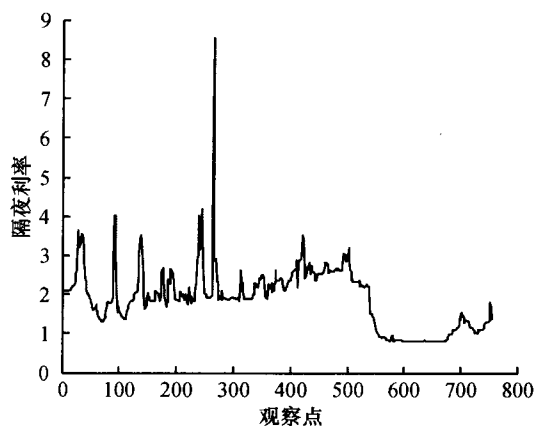


图 1 上海银行间同业拆放隔夜利率变化曲线图
(2006 年 10 月 8 日 ~ 2009 年 10 月 10 日)

表 1 上海银行间同业拆放隔夜利率基本统计数据

序列	均值	标准差	偏度	峰度
r_t	1.887 752	0.762 289	1.111 9	7.187 245
$d(r_t)$	0.000 583	0.081 772	2.491 97	12.390 441

带跳跃的 CKLS 模型是传统 CKLS 模型的扩展, 假设在任意小的时间间隔 δ 内跳跃只发生一次, 则采用 Euler 方法离散化式(2)可得

$$r_{t+\delta} - r_t = k_r(\mu_r - r_t)\delta + \sigma_r\sqrt{\delta}\varepsilon_t + J_t\xi_t\delta.$$

从而在单位时间间隔 δ , 可将带跳跃 CKLS 模型离散化为

$$r_{t+1}|r_t, k_r, \mu_r, \sigma_r, \gamma = r_t + k_r(\mu_r - r_t) + \sigma_r\gamma\varepsilon_t + J_t\xi_t. \quad (3)$$

其中, $r_{t+1}|r_t, k_r, \mu_r, \sigma_r, \gamma$ 表示已知 $r_t, k_r, \mu_r, \sigma_r, \gamma$ 的条件下 r_{t+1} 分布, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ 且 $p(J_t = 1) = \lambda\Delta t$, $\xi_{t_j} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$. r_{t+1} 基于 r_t 的条件分布可以表示为 $r_{t+1}|r_t, k_r, \mu_r, \sigma_r, \gamma \sim N(r_t + k_r(\mu_r - r_t) + J_t\xi_t, (\sigma_r\gamma)^2)$.

(4)

参考胡素华等^[14]的结果,假定各个参数的先验分布分别为

$k_r \sim N(0,1)$, $\mu_r \sim N(2,0.25)$, $\gamma \sim N(1,0.25)$, $\sigma_r^2 \sim Ig(2.5,0.025)$, $u_j \sim N(2,0.25)$, $\sigma_j^2 \sim Ig(2.5,0.025)$, 其中 Ig 表示逆 Gamma 分布.

采用 BUGS 软件,运用第2节介绍的 MCMC 方法,采用上面的数据和参数的先验分布形式,用 MH 算法迭代100 000次,舍弃掉前面的5 000个抽样,记录模拟值的后5 000个抽样样本,所得的参数估计结果如表2所示.

表2 基于 MCMC 方法的跳跃 CKLS 模型的参数估计结果

参数	均值	标准差	模拟误差	2.50%~97.50%置信区间
k_r	0.006 72	0.017 26	0.000 238	(-0.010 15, 0.0224 2)
μ_r	1.805 20	1.328 14	0.025 61	(-0.739 4, 4.935)
σ_r	0.068 40	0.016 87	0.000 457	(0.0304 7, 0.048 73)
γ	1.416 21	0.185 24	0.019 49	(0.746 5, 1.5)
μ_j	0.025 19	0.364 24	0.005 134	(-0.190 7, 0.236 2)
σ_j	1.114 37	0.268 42	0.006 889	(0.824 7, 1.228)
λ	0.184 67	0.064 24	0.001 328	(0.135 7, 0.235 1)

从表2得知: μ_j 的值为正,表明在这段时间内上海银行间同业拆放隔夜利率有上升趋势;跳跃幅度 λ 为0.184 7,表明平均每天跳跃以18.47%的概率发生,这说明了该利率以较高的几率发生跳跃事件.

进一步,图2绘制了上海银行间同业拆放隔夜利率的跳跃幅度图.比较图1和图2,可以得出跳跃在上海银行间同业拆放隔夜利率时有发生,因此考虑带跳跃的 CKLS 模型来刻画其变化过程是合理的.

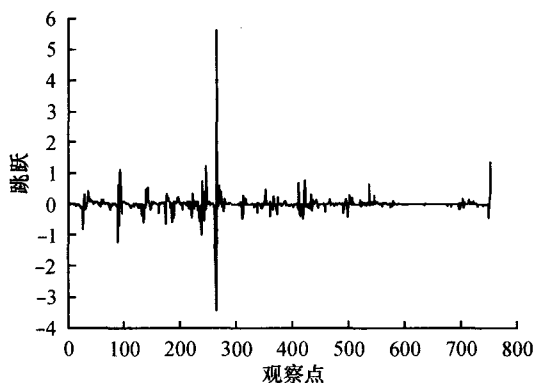


图2 上海银行间同业拆放隔夜利率跳跃幅度

3 结论

本文应用 MCMC 方法对跳跃 CKLS 模型进行了参数估计,并以上海银行间同业拆放隔夜利率为例进行了实证研究,发现上海银行间同业拆放隔夜利

率存在跳跃情况,且 MCMC 方法能够较好地估计跳跃 CKLS 模型的参数.采用 MCMC 方法对期限结构模型进行参数估计一方面解决了传统最大似然估计法需要显式条件密度函数的难题,另一方面也避免了广义矩估计对小样本特性数据估计不完整的缺陷,该方法在期限结构模型的实证估计中具有较好的应用前景.

参考文献:

- [1] Merton R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3: 125-144.
- [2] Brennan M, Schwartz E. Saving bonds, retractable bonds, and callable bonds[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5: 67-88.
- [3] Brennan M, Schwartz E. A continuous time approach to the pricing of bonds[J]. Journal of Banking and Finance, 1979, 3: 133-155.
- [4] Brennan M, Schwartz E. Analyzing convertible bonds[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1980, 15: 907-929.
- [5] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5: 177-188.
- [6] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica, 1985, 53: 385-407.
- [7] Chan K C, Karolyi G A, Longstaff F, et al. The volatility of short term interest rates: An empirical comparison of alternative models of the term structure of interest rates[J]. Journal of Finance 47, 1992: 1209-1227.
- [8] Das S. The surprise element: Jumps in interest rates[J]. Journal of Econometrics 106, 2001, 1943-1978.
- [9] Johannes M. The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rates models[J]. Journal of Finance, 2004, 227-260.
- [10] Kutoyants Y. Parameter Estimation for Stochastic Processes[M]. Berlin: Helderman; 1984.
- [11] Prakasa Rao B L S. Statistical Inference for Diffusion Type Processes[M]. London: Arnold, 1999.
- [12] Liptser R, Shirayav A. Statistics of Random Processes: II[M]. Berlin: Applications, Springer, 2001.
- [13] Johannes M, Polson N. MCMC Methods for Continuous-Time Financial Econometrics[M]. New York: Handbook of Financial Econometrics, 2006.
- [14] 胡素华, 张世英, 张彤. 双指数跳跃扩散模型的 MCMC 估计[J]. 系统工程学报, 2006, 21(2): 113-118.

(下转第76页)

Decentralized Robust Stabilization for a Class of Large-Scale Delay-Dependent Systems with Bounded Persistent Disturbances

Zeng Ai-hua¹, Jin Chao-yong¹, Ren Jian-gong¹, Chen jun²

(1. Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China;

2. ZhongKai Middle School, Huizhou 516029, China)

Abstract: The decentralized robust stabilization problem with a class of large-scale delay-dependent systems, is bounded persistent disturbance. By constructing Lyapunov functions, the linear matrix inequality (LMI) was employed. A few sufficient conditions for such large-scale systems were derived. A convex optimization of LMI constraints was formulated to design a decentralized state feedback control with smaller gain parameters, which enables the closed-loop system to be asymptotically stable. The given example verifies the effectiveness of the method.

Key words: large-scale systems; delay-dependent; uncertainties; bounded persistent disturbances; decentralized robust stabilization

(上接第70页)

Parameter Estimation of Jump CKLS Model and Its Application

Sun Lin

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract: Regarding the non-system risks in the financial market, the extended CKLS model, which describes the short-term interest rate, was proposed, based on the traditional CKLS model. Then, the likelihood function in discrete form was obtained by using the Euler method to approximate the continuous process. Furthermore, the parameters of this model were estimated by Markov Chain Monte Carlo method. Finally, based on O/N SHIBOR, an empirical study was presented. The results indicate jumps happen with a high probability in the research time and Markov Chain Monte Carlo method is effective in parameter estimation.

Key words: Markov Chain Monte Carlo; Jump CKLS model; SHIBOR; interest rate